MONTANTE DI UNA RENDITA

E' una o.f. complessa, composta da n termini, **il montante è la valutazione alla scadenza dell'ultima rata o un'epoca successiva**. Il montante della rendita è uguale alla somma dei montanti delle singole rate valutate ad un'epoca non precedente all'ultima rata. Applicando la definizione di montante in t_n si ha:

$$M_{t_n} = \sum_{k=1}^{n} R_{t_k}(1+i)^{t_n - t_k}$$

Nella pratica si incontrano rendite **periodiche** (ad esempio, rate di un mutuo) pertanto, le scadenze t_k diventano numeri interi. Inoltre, per i nostri scopo si trattano rendite con **rata costante**.

Montante di rendita posticipata e temporanea

Supposto n rate costanti e posticipate la formula precedente, si addomestica e diventa:

$$M_n = R\,[\,(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots\ldots(1+i)^{n-(n-1)} + (1+i)^{n-n}]$$

Si calcolano i montanti alla scadenza dell'ultima rata, cioè riportando in n. I termini dentro la parentesi quadra, leggendoli da destra verso sinistra, rappresentano la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine $a_1 = 1$ (osserva che $(1+i)^{n-n} = (1+i)^0 = 1$) e di ragione $q = (1+i)$. E' noto dalla Matematica Generale, che la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine a_1 e ragione q vale :

$$S_n = a_1\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

applicandola avremo:

$$S_n = 1\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

ossia:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Si legge **s figurato n al tasso i e rappresenta il montante di n rate unitarie, periodiche, posticipate all'atto dell'ultimo termine al tasso i.**

Pertanto :

$$M = R\, s_{n\, i} = R\, \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

succederà sempre che:

$$s_{n\, i} > n$$

essendo il montante di n valori unitari.

Esempi
1) Si versano alla fine di ogni trimestre 100 € per 5 anni. Trovare il montante costituito sapendo che viene applicato un tasso nominale convertibile mensilmente di 0,06.

Si ricava il tasso effettivo mensile:

$$i_{12} = J_{12}/12 = 0{,}005$$

I pagamenti sono trimestrale si calcola il tasso trimestrale equivalente:

$$i_4 = (1+ i_{12})^3 -1 = 0{,}01508$$

La somma costituita all'atto dell'ultimo pagamento è:

$$M_{20} = 100\, s_{20\; 0{,}01508} = R\, \frac{(1{,}01508)^{20} - 1}{0{,}01508} = 2.314{,}19\,€$$

2) Pagando 10 rate annue costanti al 12 % si vuole costituire un capitale di 80.000 all'atto dell'ultimo versamento. Quale capitale si costituisce se si raddoppiano le ultime quattro rate? Quanto vale il fondo di costituzione prima del raddoppio delle rate?

Il capitale da costituire di 80.000 € all'atto dell'ultimo pagamento mediante 10 rate annue costanti al 12 % è il montante di una rendita posticipata di rata:

$$\mathrm{R} = \frac{M}{s_{n\, i}} = \frac{80.000}{s_{10\; 0.12}} = 4.558{,}73\,€$$

Se si raddoppiassero le ultime 4 rate la costituzione si considera “scissa” in due rendite consecutive la prima di 6 rate pari a R e gli altri quattro termini pari a 2 R. In simboli, la somma costituita, sempre all’atto dell’ultimo pagamento è:

$$M = R\, s_{6\rceil 0,12}\,(1 + 0.12)^4 + 2\,R\, s_{4\rceil 0,12}$$

sostituendo i valori si ha:

$$M = 4.558,73\, \frac{(1+0,12)^6 - 1}{0,12}\,(1 + 0.12)^4 + 2\; 4.558,73\, \frac{(1+0,12)^4 - 1}{0,12} = 101.787.61$$

Il fondo prima del raddoppio delle rate è:

$$F_6 = R\, s_{6\rceil 0,12} = 36994,96$$

3) Si intende costituire all'atto dell'ultimo versamento la somma di 5.000 € mediante 10 versamenti annui. Dopo il terzo versamento sospende il quarto ed il quinto ricominciando ad eseguire regolarmente i versamenti a partire dal sesto incluso. Calcolare la rata originaria e quella modificata, al tasso i = 6%, concludendo la costituzione nel tempo previsto.

L'importo dei versamenti annui è:

$$R = \frac{M}{s_{10\rceil 0,06}} = 379,34$$

Applicando il principio di equivalenza al tempo 10, si deve tenere conto che dopo le prime tre rate pagate regolarmente, la quarta e il quinta rata non sono pagate, ma il fondo continua a produrre interessi più altre cinque rate d’importo da determinare:

$$379,34\, s_{3\rceil 0,06}\,(1 + 0,06)^7 + R\, s_{5\rceil 0,06} = 5.000$$

Indi la nuova rata da versare per cinque anni è:

$$R = 564,85.$$

4) Si vuole acquistare un immobile del valore di 100.000 €. A tal fine, si versa la somma di cui già si dispone di 40.000 € inoltre, mensilmente 612 € in un c/c bancario regolato al tasso annuo effettivo del 5,5%. Quanti mesi si dovrà attendere per poter acquistare l’immobile?

Il testo fornisce un tasso annuo effettivo mentre, i versamenti sono mensili, occorre il tasso mensile equivalente:

$$i_{12} = (1+ i)^{1/12} - 1 = (1,055)^{1/12} - 1 = 0,00447$$

Applicando il principio d'equivalenza finanziaria alla fine della costituzione, indicando con n il numero dei mesi necessari al raggiungimento dell'obiettivo, si ha:

$$40.000(1.00447)^n + 612\,\frac{(1{,}00447)^n - 1}{0{,}00447} = 100.000$$

risolvendo si ha:

$$(1.00447)^n = 1{,}339150228$$

estraendo i logaritmi di ambo i membri:

$$n = \ln(1{,}339150228)/\ln(1.00447) = 65{,}48 \text{ mesi}$$

il numero non è intero (come succede sempre in questi casi). Per risolvere il problema si possono fare le seguenti ipotesi:

- approssimare all'intero successivo, nel caso proposto 69 mesi, si ricalcola la rata R' < R
- approssimare all'intero precedente, nel caso proposto 68 mesi e si ricalcola la rata R' > R
- si versano 68 rate ed in più una rata complementare da pagare insieme all'ultima o un mese dopo. La rata complementare ovviamente è di valere minore di R (nel nostro caso circa il 50%) permettendo di costituire esattamente 100.000 €
- lasciare l'importo di 68 rate nel conto e ritirarlo solo appena raggiunga l'obiettivo.

Montante di rendita anticipata e temporanea

Si consideri il montante della rendita posticipata, all'atto dell'ultimo pagamento, e si sposta il montante un periodo in avanti capitalizzando per (1 + i)

$$M_{n+1} = \ddot{M}_n = R\ \ddot{s}_{n\,i} = R\ s_{n\,i}\ (1 + i) = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}\,(1 + i)$$

vale la seguente relazione:

$$\ddot{s}_{n\,i} = s_{n\,i}\ (1 + i)$$

cioè il montante di una rendita anticipata si ottiene capitalizzando, per un periodo il montante di una rendita posticipata. Si legge s bi-punto figurato n al tasso i e rappresenta **il montante di n rate unitarie, periodiche, anticipate un periodo dopo l'ultima rata.**

Infine, si precisa che il montante di rendite differite coincide con quello delle rendite immediate, perché non influisce il fatto che il primo pagamento sia avvenuto dopo un differimento essendo il valore delle rate si riportato all'atto dell'ultimo pagamento o ancora dopo. Si precisa inoltre, che non si può calcolare il montante di una rendita perpetua perché non è nota l'epoca dell'ultima rata.

Esempio

Il prof. Calabrese prevede di comprare un'auto fra tre anni del valore di 25.000 €. A tal fine comincia a fare versamenti mensili anticipati al tasso del 10,8% annuo convertibile mensilmente. Determinare:

a) la rata di costituzione

b) il fondo di costituzione al quinto mese

I versamenti sono mensili quindi bisogna convertire il tasso annuo in quello mensile equivalente:

$$i_{12} = J_{12}/12 = 0{,}009$$

la rata anticipata che deve versare Calabrese è:

$$R = \frac{M}{\ddot{s}_{n\,i}} = \frac{M}{s_{n\,i}\quad 1+i} = 583{,}83$$

Al quinto mese, il fondo di costituzione è:

$$F\ 5 = 585{,}83\ \ddot{s}_{5\ 0{,}009} = 585{,}83\ \frac{(1+0{,}009)^5 - 1}{0{,}009}\quad 1+0{,}009 = 3.009{,}19\ €$$